ESPCI

Systèmes linéaires, signaux et bruit

TD 1 : Stabilité d'un système linéaire

1 Système avec mémoire exponentielle

On considère un système dont la sortie $s(t)$ est reliée à l'entrée $e(t)$ par

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t) = e(t) - \gamma \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-(t-t')/\tau} s(t')\mathrm{d}t', \tag{1}$$

où $\tau > 0$ est un temps de mémoire caractéristique et $\gamma \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

1. Ce système est-il linéaire et invariant ?
2. En étudiant la réponse à l'entrée $e(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ (ou, au choix, e^{pt}), déterminez la fonction de transfert de ce système.
3. Sous quelle condition sur γ ce système est-il stable et causal ?
4. Quand cette condition est satisfaite, déterminez la réponse indicielle et vérifiez que les valeurs obtenues pour $s(0)$, $\dot{s}(0^+)$ et $s(t \to \infty)$ correspondent à celles attendues à partir de l'équation (1). Pour quelles valeurs de γ la réponse impulsionnelle présente-t-elle un comportement oscillant ?
5. En dérivant l'équation (1), montrez que ce système peut être décrit par une équation différentielle, et retrouvez le résultat de la question 2.

2 Système avec mémoire quelconque

On considère maintenant le système plus général

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t) = e(t) - \int_{-\infty}^{t} m(t-t') s(t')\mathrm{d}t', \tag{2}$$

où $m(t)$ est une fonction réelle de mémoire.

1. Déterminez la fonction de tranfert de ce système.
2. On suppose que $m(t)$ a une limite finie en 0. Montrez qu'une condition nécessaire pour que le système soit stable est que
$$\int_{0}^{\infty} m(t)\mathrm{d}t > 0. \tag{3}$$